

Modalidades e Multimodalidades Aristotélicas e Diodoréias

Samir Gorsky

22 de abril de 2006

Resumo

O presente trabalho analisa questões referentes à expressabilidade das linguagens modais e multimodais com relação a certas perspectivas filosóficas. Serão levados em conta as idéias aristotélicas, diodoréias e filonianas sobre a interação entre modalidades aléticas e temporais. Alguns teoremas e metateoremas do sistema minimal temporal K_t serão apresentados e discutidos além de resultados como incompletude do sistema multimodal MA que é apresentado em [White 1984]. Será feita, também, uma breve exposição da lógica da necessidade histórica assim como encontramos em [Gabbay et alii 2003]. O objetivo deste trabalho será identificar possíveis formalizações para a idéia de que o passado é necessário e o futuro possível. Consideraremos ainda alguns sistemas multimodais [cf Carnielli e Pizzi 2000] e alguns sistemas entre S4 e S5 [cf Prior 1967 e Byrd 1978].

1 Introdução

O conceito "necessidade" pode ser definido de diversas formas:

- a) Necessário é aquilo que não pode ser de outra maneira (grosso modo esta é a definição aristotélica).
- b) Necessário é aquilo que é e será sempre o caso (grosso modo esta é a definição diodoréia)
- c) Necessário é algo que acontece em todos os lugares (uma definição espacial de necessidade)
- d) Necessário é aquilo que acontece sempre (no passado, no presente e no futuro) (esta é uma definição temporal de necessidade).
- e) Necessário é aquilo que acontece sempre e em todos os lugares (uma definição de necessidade forte que mescla a necessidade do ponto de vista espacial e do ponto de vista temporal)

Em todas as definições acima temos também, mas de forma oculta, uma certa idéia de igualdade que constitui a noção de necessidade. Me parece que as várias maneiras diferentes de definir necessidade refletem as várias maneiras diferentes de definir igualdade. Por outro lado a noção de igualdade é constantemente usada para contrapor a mudança (que é um conceito fortemente relacionado à temporalidade). Daí, podemos concluir que, em qualquer caso acontece uma relação entre modalidade alética e modalidades temporais. A questão é: É possível formalizar tal relação?

2 Modalidades Aristotélicas

Aristoteles trata em suas obras sobre lógica dos silogismos modais. O termo modal aparece para se referir aos modos de apresentação do ser, ou simplesmente, os modos do ser. Tais silogismos são análogos aos silogismos aristotélicos clássicos (estes são chamados por alguns comentadores de silogismos assertóricos). A diferença aparece por causa da adição de palavras como "possível" e "necessário" às já tão conhecidas figuras. Os silogismos modais são, de certa forma, mais complicados que os assertóricos devido a algumas ressalvas e controvérsias.

O tratamento moderno das modalidades considera a possibilidade e a necessidade como conceitos interdefiníveis. Desta forma, "possível p" é o mesmo que "não necessário não p" e "necessário p" o mesmo que "não possível não p". Essas equivalências também são encontradas em [Aristoteles *Interpretationes*]. Porém nos *Primeiros Analíticos* aparece uma distinção entre duas noções de possibilidade. Por um lado a possibilidade é definida como "não necessário p e não necessário não p" por outro a necessidade é definida da mesma forma que encontramos na literatura moderna [mais informações cf. Robin Smith, Aristotle's logic em Stanford Encyclopedia of Philosophy]

3 Tempo e Necessidade: A batalha Naval

A questão sobre os futuros contingentes tem seu ponto de partida na passagem da obra aristotélica *Interpretationes* 9 onde é exposto uma análise de sentenças que estando no futuro podem, portanto, ter valores de verdade contraditórios.

Uma contradição (antiphrasis), neste contexto, é um par de proposições no qual uma afirma o que a outra nega. Para Aristóteles podemos ter exceções nos tratamentos das contradições quando falamos sobre o futuro.

Um dos casos são as proposições indefinidas como por exemplo "um ser humano está caminhando": Nada impede que a frase "não é o caso que um homem está caminhando" seja verdadeira enquanto a outra também o for.

Uma outra exceção aparece por razões um pouco mais complexas. Considere as seguintes sentenças:

- 1) Haverá uma batalha naval amanhã.
- 2) Não Haverá uma batalha naval amanhã.

Parece que apenas uma dessas sentenças podem ser verdadeiras. Mas, se 1) for verdadeira agora, então amanhã *deverá* acontecer uma batalha naval. Como resultado obtemos uma noção peculiar de possibilidade, ou seja, não há possibilidades sem a atualização do que é possível. Em termos mais simples: O que é possível tem (deve necessariamente) acontecer.

No caso acima, partimos de uma proposição temporalizada e chegamos a uma definição modal alética. Na introdução deste artigo fizemos um caminho inverso, partimos da definição de necessidade (uma modalidade alética) e chegamos a uma noção temporalizada da proposição. Daí portanto a seguinte questão:

Qual a verdadeira relação entre modalidades aléticas e modalidades temporais?

É esta questão que deve ser levada em conta neste artigo. queremos justamente encontrar a formalização lógica adequada de tal relação. Por enquanto, porém, devemos apenas expor as noções modais restantes para que então possamos passar para as possíveis formalizações.

O problema do exemplo acima é que ele se contrapõe a metafísica aristotélica no que concerne as potencialidades. Aristóteles então parece propor uma terceira via. Esta terceira via usaria uma lógica de três-valores para tratar apenas dos futuros contingentes. (para mais informações ver: Hintikka 1973, Anscombe, D. Frede 1970, Whitaker 1996 e Waterlow)

As proposições futuras que colocam problemas sobre os valores de verdade não são aquelas caracterizadas por necessidade física ou lógica, mas aquelas que na terminologia escolástica eram dadas como futuros contingentes [Pizzi 1974 p. 36]

O problema dos futuros contingentes nasce com Aristóteles, é passado ao medieval através do "De Facto" de Cícero.

Será que podemos ter futuros necessários com relação à lógica ou à física? O que garante que a lógica no futuro será regida pelas mesmas leis que a lógica no presente ou no passado?

Quanto ao tratamento dos futuros contingentes por meio de uma lógica trivalente [cf. Pizzi 1974 nota 39 p. 36].

Em *Time and Modality* Prior tentou formalizar um tipo particular de lógica indeterminista não trivalente. [cf. Pizzi 1974 nota 44 p 37].

Leibniz porém tem uma posição particular com relação aos futuros contingentes:

"Os filósofos atualmente concordam que a verdade dos futuros contingentes é determinada, ou seja, que os futuros contingentes são futuros, ou que serão, que ocorrerão: pois é tão certo que o futuro será, quanto é certo que o passado foi. Há cem anos já era verdade que eu estaria hoje a escrever, como daqui a cem anos, será verdade que agora escrevi. Assim, o contingente não é menos contingente porque é futuro; e determinação, que se denominaria certeza se fosse conhecida, não é incompatível com a contingência." [Leibniz, Teodicéia]

Podemos ainda prestar atenção na seguinte dica dada por Robin Smith, [Aristotle's logic em Stanford Encyclopedia of Philosophy p. 25]:

"it is likely that Aristotle is responding to an argument originating in the Megarian School. He ascribe the view that only that which happens is possible to the Megarians in *Metaphysics IX Θ*. The Puzzle with which he is concerned strongly recalls the "Master Argument" of Diodorus Cronus, especially in certain further details. For instance, Aristotle imagines the statement about tomorrow's sea battle haven been uttered ten thousand years ago. If it was true, then its truth was a fact about past; if the past is now unchangeable, then so is the truth value of that past utterance. This recalls the Master Argument's premise that "what is past is necessary". Diodorus Cronus was active a little after Aristotle, and he was a megarian. It seems to me reasonable to conclude that Aristotle's target here is some Megarian argument, perhaps an earlier version of the master."

4 Modalidades Filonianas e Diodoréias

Definição Diodoréia de Possível:

"o que é ou será verdadeiro"

De um ponto de vista teórico, a definição diodoréia constrói uma ponte entre a noção modal alética e a temporal.

Definição formal da modalidade diodoréia:

$$Mp \leftrightarrow (p \vee Fp) \text{ e } Lp \leftrightarrow (p \wedge Gp)$$

A definição de Mp proposta corresponde à modalidade que Rescher chama de "megárico-aristotélica" em contraposição à modalidade estóica (ou diodoréica)

5 O Sistema minimal K_t

O sistema minimal das PF-lógicas chama-se K_t (Prior). Podemos construir K_t adicionando à lógica proposicional Clássica PC, os seguintes axiomas e regras.

Axiomas:

(cópias de K)

$$A1. G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$$

$$A2. H(p \rightarrow q) \rightarrow (Hp \rightarrow Hq)$$

(axiomas mistos)

$$A3. p \rightarrow HFP$$

$$A4. p \rightarrow GPP$$

Regras:

(Além do modus ponens e da substituição que já são regras em PC, temos:)

NG:

$$\frac{\vdash_{K_t} A}{\vdash_{K_t} GA}$$

NH:

$$\frac{\vdash_{K_t} A}{\vdash_{K_t} \bar{A}}$$

[cf. Carnielli e Pizzi 2000] e [cf. Gabbay et alii 2003]

Resultados em K_t :

1. Todo teorema em K_t com apenas operadores H, P, é também teorema se substituirmos H por G e P por F.

$$2. A \vdash_{K_t} HFA \text{ e } A \vdash_{K_t} GPA$$

Prova: Dado p, pode-se substituir p por Pp e então aplicar NG, ou por Fp e então aplicar NH.

3. As seguintes sequências de operadores temporais preservam teoremas em K_t :

H, G, HF, GP, HHF, HH, GGP, GG,...etc.

4. Qualquer sequência de H e G em frente de um teorema é também um teorema por aplicações sucessivas de NH e NG. Daí, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $G^n p$ e $H^n p$ seguido de teorema, será também teorema.

5. ...HFHFHF... e ...GPGPGP... essas sequências em frente a um teorema será também um teorema.

6. HHFHHFHHF... e HHHFHHHFHHHF... e seus duais são sequências que preservam teoremas.

7. Qualquer permutação finita de HF que comece com H e que, entre quaisquer dois F haja pelo menos um H será uma sequência que preserva teorema. (isso vale também para os duais destas permutações)

6 Tentativas de axiomatização para sistemas modais Megarico-Aristotélicos

Para construção de sistemas multimodais temos duas opções:

- a) Partir de um sistema modal alético e adicionar um sistema temporal.
- b) Partir de um sistema temporal e adicionar um alético.

Para exemplos de sistemas multimodais [cf. Venema et alii 2002, Michael White 1984 e Carnielli e Pizzi 2000].

Questões motivadoras:

É possível formalizar (axiomatizar) um sistema multimodal alético-temporal que afirme que todo o passado é necessário?

Se é possível então:

Quais os sistemas o fazem?

Qual o mais simples dos sistemas que o fazem?

Os sistemas apropriados são normais?

São corretos e completos?

Vale compacidade ou Löwenheim-Skolem?

Existe alguma hierarquia destes sistemas?

Vejam agora algumas possíveis fórmulas que podem expressar a noção de necessidade do passado.

1. $LPp \wedge MFp$
2. $Pp \rightarrow Lp$
3. $Hp \rightarrow Lp$
4. $Pp \leftrightarrow Lp$
5. $Hp \leftrightarrow Lp$
6. $Pp \leftrightarrow LPP$
7. $Pp \rightarrow LP$
8. $Pp \rightarrow LPLp$
9. $Pp \rightarrow GLPp$
10. $Pp \rightarrow LGPp$
11. LHp
12. $\forall p(Pp \rightarrow Lp)$

Para Frames Multimodais, os domínios das relações devem ser os mesmo ou podemos ter dois domínios diferentes?

É possível uma lógica n-modal na qual todas as modalidades são definidas a partir de uma única relação? Em outras palavras seria o mesmo que já é feito na "tense logic" (duas modalidades e uma única relação). Uma terceira modalidade poderia ser definida assim:

$$V(Mp, w) = 1sse\exists z\exists x(wRx \wedge xRz)eV(p, z) = 1$$

ou

$$V(Mp, w) = 1sse\exists z\exists x(wRx \wedge wRz)eV(p, x) = V(p, z)$$

.

.

.

etc.

Uma outra coisa a fazer a partir de tais sistemas é analisar o grau de incompletude (caso sejam incompletos) dos sistemas multimodais. [cf Goldblatt 2005 p. 47 e Fine 1974].

Obs: Me parece que o Axioma A3 produz um determinismo para as coisas que acontecem. É como se de acontecer p, não pudéssemos dizer que p seria o caso para todo o passado. O que o axioma expressa é que um acontecimento presente faz com que todo o passado seja convergente para tal acontecimento. Essa é aquela mesma idéia do presente como alinhador dos pontos possíveis do futuro,

ou seja, o presente seria uma espécie de máquina que alinha os acontecimentos em uma ordem sequencial.

Por outro lado A4 conecta todo o futuro ao presente. A divergência entre esse axioma e a idéia de que o futuro e o possível são intercambiáveis é a de que a necessidade do passado seja necessária no futuro, ou seja:

(fórmula da nec. do passado) \rightarrow LG (fórmula da nec. do passado).

Em [Pizzi 1974] encontramos que o axioma A3 do sistematemporal minimal K_t é sugerida a Prior através da leitura do livro *Tractatus de Praedestinatione* de Okhan.

6.1 O sistema T1

Axiomas:

1. Axiomas e regras proposicionais.
2. Axioma K $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow q)$

Regras

1. Necessitação

$$\frac{\vdash A}{\vdash LA}$$

2. Regra da necessitação com relação ao passado.

$$\frac{\vdash HA}{\vdash LA}$$

7 A Lógica da necessidade Histórica

[Gabbay et alii, 2003 - logics of historical necessity p. 299]

[Zanardo, 1985] Axiomatização da lógica da necessidade histórica.

[Zanardo, 1992]

A lógica da necessidade histórica parte da seguinte questão:

$G\perp \rightarrow LG\perp$ é válida ou não?

7.1 O sistema HN1

1. Axiomas para a lógica linear temporal envolvendo (F, P)

São os axiomas para K_t

2. Axiomas para a modalidade S5 envolvendo (M)

HN11 $L(A \wedge B) \leftrightarrow LA \wedge LB$

HN12 $LA \rightarrow LLA$

HN13 $LA \rightarrow A$

HN14 $A \rightarrow LMA$

3. $A \rightarrow LA$ Para todo A que não contém F.

4. $\neg r \wedge Hr \wedge LA \rightarrow GLH(\neg r \wedge Hr \wedge \rightarrow A)$

5. $A \rightarrow GLPMA$

Regras:

1. As regras de Modus Ponens e $\vdash A \Rightarrow \vdash LA, \vdash GA, \vdash HA$.

2. A regra IRR onde q é um átomo que não está em A.

$$\frac{\vdash \neg q \wedge (Hq \rightarrow A)}{\vdash A}$$

8 Bibliografia

- [Byrd 1978] BYRD, M. *Megarian Necessity in Forward-Branching, Backward-Linear Time*, *Noûs*, Vol. 12 (1978), pp. 463-469.
- [Carnielli e Pizzi 2000] CARNIELLI, A. e PIZZI, C. *Modalità e Multimodalità*, (Milão 2000).
- [Fine 1974] FINE, Kit "An Ascending Chain of S_4 Logics", *Theoria* vol. 40 (1974), pp. 110-116.
- [Frede 1970] FREDE, D. *Aristoteles und die Seeschlacht*, (Göttingen, 1970).
- [Gabbay et alii 2003] GABBAY, D. M., Hodkinson, I., and Reynolds, M., 1994, *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, Volume 1., Oxford: Clarendon Press.
- [Goldblatt 2005] GOLDBLATT, R. *Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution* *Journal of Applied Logic*, vol. 1, nos. 5-6, October 2003, 309-392. Revised version, to appear in *The Handbook of the History of Logic*, Volume 7: *Logic and the Modalities in the Twentieth Century*.
- [Hintikka 1973] HINTIKKA, J. *Time and Necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality*. Oxford UP, 1973.
- [Pizzi 1974] PIZZI, C. (org.) *La logica del tempo*, Boringhieri, Torino, 1974
- [Prior 1967] PRIOR, A. *Past, Present and Future*. Oxford: Clarendon Press. 1967.
- [Smith 2004] SMITH, R. *Aristotle's logic* em *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2004
- [Whitaker 1996] WHITAKER, C. W. A. *Aristotle's De Interpretatione: Contradiction and Dialectic*. Oxford: Clarendon Press. 1996
- [White 1984] WHITE, M. *The necessity of the past and modal-tense logic incompleteness* *Notre Dame J. Formal Logic* 25, no. 1 (1984), 59-71.
- [Zanardo 1985] ZANARDO, A. *A finite Axiomatization of the set of strong Valid Okhamist Formulas*. *J. Of Phil. Log.* vol 14 (1985) 447-468.
- [Zanardo 1992] Alberto Zanardo: *A Note about the Axioms for Branching-Time Logic*. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 33(2): 225-228 (1992).