Lógica da inconsistência formal

Samir Gorsky

10 de abril de 2007

Resumo

Apresentação do artigo.

1 Primeira parte

Conceitos e definições:

Para $\vdash \subseteq \wp(For) \times For$ dizemos que $\vdash$ define uma relação de consequência (tarskiana) em For se valem as seguintes cláusulas, para quaisquer fórmulas α e β e subconjuntos Γ e Δ de For:

(Con1) $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ (Reflexividade).
(Con2) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma) \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ (Monotonicidade).
(Con3) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash \beta) \Rightarrow \Delta, \Gamma \vdash \beta$ (Corte)

(Con4) $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma^{fin} \vdash \alpha$, para algum $\Gamma^{fin} \subseteq \Gamma$ finito. (compacidade)

Definição (Lógica tarskiana):

Uma lógica tarskiana é definida simplesmente como uma estrutura da forma $\langle For, \vdash \rangle$, contendo um conjunto de fórmulas e uma relação de conseqüência definida. (Esta relação deve respeitar as propriedades (Con1 - Con4).

Estruturalidade:

Seja ε um endomorfismo. (ε é a única extensão homomorfica de uma função de P em For.

Uma lógica é estrutural se sua relação de conseqüência preserva endomorfismos.

(Con5) $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \varepsilon(\Gamma) \vdash \varepsilon(\alpha)$ (estruturalidade)

Teoria:

Qualquer conjunto $\Gamma \subseteq For$ é chamado de teoria de L.

- Se $\Gamma \neq For$ dizemos que a teoria é própria.

- Uma teoria é fechada se contém todas as suas conseqüências. ($\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$) p. t. α.
- Se $\Gamma \vdash \alpha$ p. t. Γ, dizemos então que α é uma tese (desta lógica).

Definição (teoria explosiva):

Uma teoria Γ é dita explosiva se:

$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta)$

Trivial $\Rightarrow$ Explosiva (pois monotonicidade, (Con2))

Contraditória $\wedge$ Explosiva $\Rightarrow$ Trivial

2 Segunda parte

Paraconsistência (entre a explosão e a trivialidade)

Fundadores da lógica paraconsistente:

- Jaskowski (1948)

- David Nelson (1959)

- Newton da Costa (1963)

a) Jaskowski

Uma lógica é paraconsistente se:

$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$ (4)
b) Da Costa

Uma lógica é paraconsistente se:

$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma \vdash \alpha e \Gamma \vdash \neg\beta e \Gamma \nvdash \beta)$ (5)

Pode-se provar que 4 e 5 são equivalentes usando (Con1) e (Con3)

(Con6) $(\forall\beta \in \Delta)(\gamma \vdash \beta e \Delta \vdash \alpha) \rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ (corte para conjuntos)

Definição (lógica consistente):

A lógica L é consistente se é explosiva e não-trivial, ou seja, se respeita (3) e (2).

Definição (Paraconsistência):

Uma lógica é paraconsistente se é incosistente porém não-trivial. (6)

Uma lógica L é finitamente trivializável quando possui teorias triviais finitas.

Se uma lógica é explosiva, então é finitamente trivializável.

Lógicas não explosivas podem ser finitamente trivializáveis ou não.

Uma fórmula ξ em L é uma partícula Bottom se pode trivializar a lógica, ou seja:

$\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \vdash \beta)$

Essa partícula Bottom será denotada por $\perp$.

Princípio do *Ex Falso Sequitor Quodlibet*:

$\exists\xi\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \vdash \beta)$ (L possui uma partícula bottom) (7)

O conceito dual da partícula bottom: A partícula top.

$\forall\Gamma(\Gamma \vdash \zeta)$

Esta partícula top será denotada por $\top$.

3 terceira parte

Definição:

Dizemos que uma lógica L possui uma negação suplementar (sulement negation) se existe uma fórmula $\varphi(p_0)$ tal que:

a) $\varphi(\alpha)$ não é uma patícula de contradição (bottom particle) para algum α.

b) $\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \varphi(\alpha) \vdash \beta)$

Princípio suplementar da explosão:

L possui uma negação suplementar. (8)

L possui uma implicação dedutiva se existe uma fórmula $\psi(\alpha, \beta)$ tal que:

a) $\psi(\alpha, \beta)$ não é uma partícula bottom, para algum α e β.

b) $\forall\alpha\forall\beta\forall\Gamma(\Gamma \vdash \psi(\alpha, \beta) \Rightarrow \Gamma, \alpha \vdash \beta)$

c) $\psi(\alpha, \beta)$ não é uma partícula top, para algum α e β.

d) $\forall\alpha\forall\beta\forall\Gamma(\Gamma, \alpha \vdash \psi(\alpha, \beta)$.

Teorema:

Seja L uma lógica não-trivial com partícula bottom $\perp$ e uma implicação dedutiva $\rightarrow$

(i) Seja $\neg$ um símbolo de negação, e suponha que este satisfaça:

a) $\Gamma, \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \perp$

b) $\Gamma, \neg\alpha \rightarrow \perp \vdash \alpha$

Então este $\neg$ é uma negação suplemento.

(ii) Suponha, por outro lado, que vale o seguinte caso:

c) $\alpha \rightarrow \perp \nvdash \perp$, para algum α.

Então uma negação suplemento pode ser definida da seguinte maneira:

$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$

Definição:

Dizemos que a lógica L possui uma negação complemento se existe uma fórmula $\psi(p_0)$ tal que:

a) $\psi(\alpha)$ não é uma partícula top para algum α.

b) $\forall\Gamma\forall\alpha(\Gamma, \alpha \vdash \psi(\alpha) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi(\alpha))$.

Dizemos que L possui uma negação clássica se possui algum (definido ou primitivo) conectivo de negação que é suplementar e complementar.

Definição:

Seja L uma lógica, e seja $\sigma(p_1, ..., p_n)$ uma fórmula de L.

(i) Dizemos que L é parcialmente explosiva com resprito á fórmula σ (ou $sigma$-parcialmente-explosiva) se:

a) $\sigma(\beta_0), ..., \beta_n$ não é uma partícula top, para alguma escolha de $\beta_0, ..., \beta n$

b) $\forall\Gamma\forall\beta_0, ..., \beta_n\forall\alpha(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \sigma(\beta_0, ..., \beta_n)$

(ii) L é limitadamente paraconsistente se não existe σ tal que L seja σ-parcialmente-explosiva.

(iii) L é dita controlavelmente explosiva em contato com a fórmula σ, se:

a) $\sigma(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ e $\neg\sigma(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ não são partículas bottom para alguma escolha de $\alpha_0, ..., \alpha_n$

b) $\forall\Gamma\forall\alpha_0, ..., \forall\alpha_n\forall\beta(\Gamma, \sigma(\alpha_0, ..., \alpha n) \vdash \beta)$

- Uma lógica é dita adjuntiva à esquerda se existe uma fórmula $\psi(p_0, p_1)$ tal que:

  a) $\psi(\alpha, \beta)$ não é uma partícula bottom, para algum α e β.

  b) $\forall\alpha\forall\beta\forall\Gamma\forall\gamma(\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma \Rightarrow \Gamma, \psi(\alpha, \beta) \vdash \gamma)$

  $\psi(\alpha, \beta)$ é denotada por $(\alpha \wedge \beta)$.

- Uma lógica é dita disadjuntiva à esquerda se existe uma fórmula $\varphi(p_0, p_1)$ tal que:

  c) $\varphi(\alpha, \beta)$ não é uma partícula top, para algum α e β.

  d) $\forall\alpha\forall\beta\forall\Gamma\forall\gamma(\Gamma, \varphi(\alpha, \beta) \vdash \gamma \Rightarrow \Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma$

Teorema:

Seja L uma lógica adjuntiva à esquerda (left-adjuntive).
(i) Se L é finitamente trivializável (em particular, se possui uma negação suplemento), então esta lógica possui uma partícula bottom.
(ii) Se L respeita **ex contraditione**, então também respeita ex falso.

4 O sistema mCi

Conectivo de consistência e o conectivo de inconsistência em mbc.

$\bullet\alpha \triangleq \sim \circ\alpha$

Onde:

$\sim \alpha \triangleq \alpha \rightarrow (\beta \wedge (\neg\beta \wedge \circ\beta))$
Como drfinir a inconsistência em mbc usando a negação paraconsistente?

Sabemos que:

$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash_{mbC} \neg \circ \alpha$ (teorema 45 (i))

A conversa do resultado acima (que não vale em mbC) será o primeiro teorema acrescentado a mbC. Desejamos que as fórmulas do tipo $\neg \circ \alpha$ devem se comportar classicamente. Daí a idéia de se obter uma lógica que seja controlavelmente explosiva quando em contato com fórmulas da forma $\neg^n \circ \alpha\ \neg^{n+1} \circ \alpha$.

Qualquer fórmula com esta forma se comporta classicamente.

Portanto $\{\neg^n \circ \alpha, \neg^{n+1} \circ \alpha\}$ poderia ser considerada como uma teoria explosiva.

Definição 74: A lógica mCi é obtida de mbC pela adição dos seguintes esquemas de axiomas:

(ci) $\neg \circ \alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

$(cc)_n$ $\circ\neg^n \circ \alpha$ $(n \geq 0)$

A definição do conectivo de inconsistência para a axiomatização acima é a seguinte:

$\bullet\alpha \triangleq \neg \circ \alpha$

$\neg \circ \alpha$ e $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ são equivalentes em mCi.

$\circ\alpha$ se comporta classicamente com relação à negação negação paraconsistente.

Qualquer negação interada sobre $\circ\alpha$ funciona classicamente.

Veremos abaixo algumas características do operador $\bullet$

Percebemos aqui uma forte relação entre inconsistência e contradição em termos de negação paraconsistente.

A equivalência entre $\neg \circ \alpha$ e $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ em mCi é mais fraca que a equivalência entre $\circ\alpha$ e $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ em C_1.

Teorema 75: A seguinte regra vale em mCi:

(i) $\neg \circ \alpha \vdash_{mCi} (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Mas as seguintes regras não valem:

(ii) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash_{mCi} \circ\alpha$

(iii) $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha) \vdash_{mCi} \circ\alpha$

Prova: (i) Peo axioma adicionado (ci). (ii) e (iii) Matrizes de LFI1.

Teorema 76: (i) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ e $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ não são partículas top em mCi.

(ii) $\circ\alpha$ e $\neg\circ\alpha$ não são partículas bottom (em mCi).

(iii) Os esquemas $(\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ e $(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ não são prováveis em mCi.

Teorema 77: A seguintes regras valem em mCi:

(i) $\neg\neg\circ \vdash_{mCi} \circ\alpha$

(ii) $\circ\alpha \vdash_{mCi} \neg\neg\circ\alpha$

(iii) $\circ\alpha, \neg\circ\alpha \vdash_{mCi} \beta$

(iv) $(\Gamma, \beta \vdash_{mCi} \circ\alpha)$ e $(\Delta, \beta \vdash_{mCi} \neg\circ\alpha)$ implica $(\Gamma, \Delta \vdash_{mCi} \neg\beta)$

Teorema 78: Seja **L** uma extensão não trivial de **mCi** com uma implicação dedutiva. Um esquema $\sigma(p_0...p_n)$ é provado como sendo consistente em **L** sse **L** é controlavelmente explosiva em contato com $\neg\sigma(p_0...p_n)$

Teorema 79: Algumas formas de contraposição valem em mCi a saber:

(i) $(\alpha \rightarrow \circ\beta) \vdash_{mCi} (\neg\circ\beta \rightarrow \neg\alpha)$

(ii) $(\alpha \rightarrow \neg\circ\beta) \vdash_{mCi} (\circ\beta \rightarrow \neg\alpha)$

(iii) $(\neg\alpha \rightarrow \circ\beta) \vdash_{mCi} (\neg\circ\beta \rightarrow \alpha)$

(iv) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\circ\beta) \vdash_{mCi} (\circ\beta \rightarrow \alpha)$

Teorema 80:

(i) A propriedade de substituição (PS) não se acontece em mCi.

(PS) não pode valem em qualquer extensão de mCi na qual:

(ii) $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vdash_{mbC} (\alpha \vee \neg\alpha$ vale ou;

(iii) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash_{mbC} \neg(\alpha \wedge \beta)$ vale.

Teorema 81: Nas extensões de mCi a validade de:

(EC) implica $\neg\alpha \dashv\vdash \neg\beta$

Garante a validade de:

(EO) $(\circ\alpha \dashv\vdash \circ\beta))$