

Semânticas algébricas e lógicas modais

Samir Gorsky
Orientador: Walter Carnielli
UNICAMP - CLE

25/05/2007

1

Divisão geral do trabalho:

1. Apresentação do Artigo: Semantics for Modal Logics de E. J. Lemmon [Lemmon 1966]
2. Aplicação do método usado por Lemmon aos sistemas da classe G.

2

Estrutura do artigo [Lemmon 1966]:

- Apresentação dos sistemas modais fracos (E2, D2, C2, T, T(D)=D, T(C)=K)
- Álgebras e Matrizes
- A propriedade dos Modelos Finitos
- Álgebras e Modelos

3

Objetivos:

- Objetivo do trabalho de Lemmon:

Mostrar que os resultados de completude obtidos por Kripke para os sistemas modais por meio semântico podem ser tratados algebricamente.

- Objetivo deste trabalho:

Através da metodologia empregada no artigo de Lemmon citado acima expandir os resultados para os sistemas G-infinito.

4

Metodologia empregada por Lemmon:

- Primeiro: Estabelecer a correlação entre matrizes regulares para cada sistema e um certo tipo de algebra
- Segundo: Usando a matriz de Lindenbaum provar que cada sistema tem a propriedade do modelo finito
- Terceiro: Estabelecer teoremas de representação para tais algebras em termos de uma algebra baseada no conjunto de todos subconjuntos de um dado conjunto.

5

Como exemplo mostraremos essa metodologia aplicada aos sistemas modais fracos, ou seja, os sistemas E2, D2, C2, T, T(D)=D e T(C)=K

Caracterização dos sistemas

Axiomas

$$A1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A4: \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

$$A5: \Box A \rightarrow \neg \Box \neg A$$

$$A6: \Box A \rightarrow A$$

6

Regras:

R1: $A, A \rightarrow B \vdash B$

R2: $A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Box B$

R3: $A \vdash \Box A$

7

Definições:

$$D1: A \vee B := \neg A \rightarrow B$$

$$D2: A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$D3: A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$D4: \diamond A := \neg \square \neg A$$

$$D5: A \Rightarrow B := \square(A \rightarrow B)$$

$$D6: A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow B)$$

$$D7: \square^n A := \square \underbrace{\quad \quad \quad}_{n \text{ vezes}} \square A$$

$$D8: \diamond^n A := \diamond \underbrace{\quad \quad \quad}_{n \text{ vezes}} \diamond A$$

$$D9: A \Rightarrow^n B := \square^n(A \rightarrow B)$$

$$D10: A \Leftrightarrow^n B := (A \Rightarrow^n B) \wedge (B \Rightarrow^n A)$$

8

Os seis sistemas modais são definidos como se segue:

$$C2 = [A1 - A4 ; R1, R2]$$

$$D2 = [A1 - A5 ; R1, R2]$$

$$E2 = [A1 - A4, A6 ; R1, R2]$$

$$K = [A1 - A4 ; R1, R3]$$

$$D = [A1 - A5 ; R1, R3]$$

$$T = [A1 - A4, A6 ; R1, R3]$$

9

Álgebras e Matrizes

Qual é a relação entre álgebras e sistemas modais?

- S4 e *Closure* Álgebras [MacKinsey-Tarski 1948]
- T e a Generalização das *Closure* Algebras (*Extension* Algebras)[Lemmon 1960]
- C2 e a 'Álgebra Modal'

Mas será que podemos ter um método geral para determinar, para cada sistema modal, qual álgebra deve estar a ele relacionada?

Definição (Álgebra Modal):

Uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ é uma *álgebra modal* sse M é um conjunto de elementos fechado sob as operações $\cup, \cap, -$ e \mathbf{P} tais que:

(i) M é uma álgebra Booleana com respeito a \cup, \cap e $-$

(ii) Para $x, y \in M$, $\mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$

Definição (N): $\mathbf{N}x := -\mathbf{P} - x$

11

Propriedades:

(i) Para $x, y \in M$, $\mathbf{N}(x \cap y) = \mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y$

(ii) Para $x, y \in M$, se $x \leq y$, então $\mathbf{P}x \leq \mathbf{P}y$ e $\mathbf{N}x \leq \mathbf{N}y$ (onde $x \leq y$ sse $x \cup y = y$ sse $x \cap y = x$)

Definição (Matriz):

[Carnielli e Coniglio 2003] Dada uma assinatura C , uma C -matirix é um par $M = \langle A, D \rangle$, onde $A = \langle A, C \rangle$ é uma algebra sobre C , e $D \subseteq A$. O conjunto D é normalmente referido como o conjunto de valores designados de M . As M -valorações de $L(C)$ são os C -homomorfismos $v : L(C) \rightarrow A$.

13

Uma lógica proposicional pode ser interpretada por uma matriz da seguinte maneira: Tomamos as variáveis proposicionais de uma fbf da lógica para variar sobre os elementos da matriz. Interpretamos os conectivos da lógica como operações na (ou definíveis na) matriz; deste modo, cada fbf A contendo n variáveis proposicionais está associada a uma (única) função-matriz $f^{(A)}$ de n variáveis.

14

Definição:

Dizemos que A é *satisfeita* por uma matriz sse, sob uma dada interpretação, o valor de $f^{(A)}$ para toda n -upla de elementos da matriz permanece em D . Caso contrário dizemos que A é *falsificada* pela matriz.

15

Definição:

Um sistema S é *satisfeito* por uma matriz sse todos os teoremas de S são satisfeitos pela matriz.

Definição:

Um sistema é *caracterizado* por uma matriz (ou uma matriz é *característica* para um sistema) sse as fbfs do sistema satisfeitas pela matriz coincidem com os teoremas deste sistema.

16

Teorema (Lindembaum):

Seja L uma lógica proposicional tal que T_L é fechada sob substituição de variáveis proposicionais

Entã $\exists \mathfrak{M}$ para L .

Corolário: Existe uma matriz característica para cada um dos sistemas $C2$, $D2$, etc.

17

Definição (Matriz Própria):

Uma matriz $\mathfrak{M} = \langle M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ é *própria* sse $D \subset M$.

Definição (Matriz Regular):

Uma matriz $\mathfrak{M} = \langle M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ é *regular* sse:

- (i) \mathfrak{M} é própria;
- (ii) D é ideal aditivo de M ;
- (iii) se $x \leftrightarrow y \in D$, então $x = y$.

(Um conjunto $D \subseteq M$ é um *ideal aditivo* sse $x \in D, y \in D \Rightarrow x \cap y \in D$ e $x \in D, y \in M \Rightarrow x \cup y \in D$.)

O próximo passo é mostrar como se constroem matrizes regulares a partir das matrizes de Lindembaum.

19

Teorema:

$\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma C2-matriz regular sse $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma algebra modal e $d = 1$.

Definição (Algebra Modal Deontica): D2

Uma algebra é *deontica* sse, além de ser modal, satisfaz o postulado:

$$(iv) P1 = 1$$

Definição (Algebra Modal Epistêmica): E2

Uma álgebra é *epistêmica* sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o postulado:

$$(v) x \leq Px$$

Definição (Álgebra Modal Normal): $T(C) = K$

Uma álgebra é *normal* sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o seguinte postulado:

$$(vi) P0 = 0$$

Teorema:

Toda álgebra epistêmica é também uma álgebra deôntica.

Demonstração: Por (v) nós concluimos $1 \leq P1$. Como se trata de álgebra booleana, temos $P1 \leq 1$, daí $P1 = 1$, o que é (iv).

22

Teorema:

A matriz $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma D2-
(E2-, K-, D-, T-) matriz regular sse $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$
é uma álgebra deôntica (epistêmica, normal,
normal deôntica, normal epistêmica) e $d = 1$.

23

Os resultados até aqui obtidos nos dão a completude para os seis sistemas modais da seguinte forma:

Teorema:

$\vdash_{C2(D2,E2,K,D,T)} A$ sse A é satisfeita por todas as álgebras modais (deôntica, epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica).

24

Os sistemas da classe G-infinito (Cf. [Lemmon 1977] e [Carnielli e Pizzi 2000])

Exemplo de algumas fórmulas modais importantes:

$$D: \Box A \rightarrow \Diamond A$$

$$T: \Box A \rightarrow A$$

$$4: \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

$$B: \Diamond \Box A \rightarrow A$$

$$E: \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$$

25

Um outro exemplo são as várias generalizações de 4:

$$4^n: \square^n A \rightarrow \square^{n+1} A$$

Onde $4^1 = 4$.

26

O Esquema G

$$G: \diamond \Box A \rightarrow \Box \diamond A$$

Generalização do esquema G (chamado “incestual” por Lemmon e Scott, nas “Lemmon Notes”)

$$G': \diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^p \diamond^q A$$

é interessante observarmos que todos os esquemas supracitados como extensão de K são casos particulares de G' . Desta forma T é o caso em que: $m, p, q = 0, n = 1$; 4^n o caso em que $m, q = 0, p = n + 1$; E o caso em que: $q = 0, m, n, p = 1$; e assim por diante.

A algebra modal G

- Primeiro definiremos um sistema que será chamado de sistema G. Nomenclatura esta baseada no nome do esquema de fórmula G'.
- O sistema G pode então ser definido da seguinte forma:

Seja G a seguinte fórmula: $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$,
ou seja, G é a instância do esquema G-Infinito onde todos os parâmetros (m, n, p e q) recebem o valor 1.

- O sistema G é o seguinte sistema:

$$G = [A1 - A4, G; R1, R3]$$

- Definiremos a álgebra do sistema normal G da seguinte forma: é uma álgebra modal normal na qual vale:

$$NP - x \cup NPx = 1$$

- Tentaremos mostrar a seguir como poderíamos conseguir algebrizar o sistema G usando o método apresentado acima e proposto por [Lemmon 1966].

- Pelo teorema 8 o sistema G possui uma matriz regular característica tal que D possui apenas um elemento. Chamaremos esta matriz de \mathfrak{M}_G .
- O teorema do slide 19 nos mostra como relacionar álgebras e matrizes. Daí, podemos relacionar uma álgebra modal G matriz regular característica \mathfrak{M}_G .

Esquema de prova:

- Primeiro: Matriz \Rightarrow Álgebra.

(a) Suponha que a matriz \mathfrak{M}_G seja regular.

(b) A Matriz verifica os axiomas booleanos (pois o sistema G contém a lógica proposicional). O caso $P(x \cup y) = (Px \cup Py)$ foi mostrado ao se provar o teorema para o sistema $C2$.

(c) $d = 1$ Vale (foi provado para o caso $C2$).

(d) $NP - x \cup NPx = 1$ Vale pois $\vdash_G \Box \Diamond \neg A \vee \Box \Diamond A$

- Segundo: Álgebra \Rightarrow Matriz

(a) Os esquemas de axiomas A1-A3 são satisfeitos por $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P \rangle$.

(b) A matriz-função de A4 também é satisfeita. O mesmo se dá para R1 (Cf. [Lemmon 1966]).

(c) A regra R3:

seja $x = 1$.

$Nx = -P - x = -P - 1 = -P0 = -0$ (pois é normal $P0 = 0$), daí $-0 = 1$

32

A função-matriz de G

- $NP - x \cup NPx$

Mostraremos que esta função tem valor 1 na algebra.

33

(i) $N1 = 1$

$P0 = 0$ sse $\neg P0 = \neg 0$ sse $N-0 = \neg 0$ sse $N1 = 1$

(ii) Suponha que $NP-x = 0$

$NP-x = 0$ sse $PNx = 1$, como $P0 = 0$ temos
 $Nx = \neg 0$ sse $Nx = 1$, como $N1 = 1$ concluimos
 $x = 1$

(iii) Se $x = 1$ então vejamos o que se dá no caso NPx

$Px = \neg 0$ pois $x = 1$ daí $Px = 1$ e portanto $NPx = 1$ pois $N1 = 1$.

34

Aplicando o teorema (adaptado) do slide 23 a saber:

Teorema:

$\vdash_{C2(D2,E2,K,D,T,G)} A$ sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica, epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica) e normal G .

temos a completude a completude algbrica do sistema G .

Bibliografia

[Carnielli e Coniglio 2003] CARNIELLI, Walter Alexandre; CONIGLIO, M. E. Splitting Logics. In: Serguei Artemov; Howard Barringer; Artur Garcez; Luis Lamb; John Woods. (Org.). We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay. 1 ed. Londres: College Publications, 2005, v. 1, p. 389-414.

[Carnielli e Pizzi 2000] CARNIELLI, A. e PIZZI, C. Modalit e Multimodalit, (Milo 2000).

[Goldblatt 1976] GOLDBLATT. R.I.. Meta-mathematics of modal logic. Reports on Mathematical. Logic, 6:4177, 1976.

[Halmos 1955] HALMOS. P.R. Algebraic logic. Compositio Mathematica, 12:217249, 1955.

[Kripke 1959a] KRIPKE. Saul A. Semantic analysis of modal logic (abstract). *The Journal of Symbolic Logic*, 24:323324, 1959.

[Kripke 1959b] KRIPKE. Saul A. A completeness theorem in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 24:114, 1959.

[Kripke 1963] KRIPKE. Saul A. Semantical analysis of modal logic I. Normal modal prepositional calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:6796, 1963.

Bibliografia

[Lemmon 1960] LEMMON, E. J. Extension Algebra and the Modal System T. In Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 1 (1960), pp. 3-12.

[Lemmon 1966] LEMMON, E. J. Algebraic semantics for modal logics I and II. The Journal of symbolic logic. Vol. 31, Number 1, June 1965. Volume 31, Number 2, June 1966.

[Lemmon 1977] LEMMON. E. J. An Introduction to Modal Logic, volume 11 of American Philosophical Quarterly Monograph Series. Basil Blackwell, Oxford, 1977. Written in collaboration with Dana Scott. Edited by Krister Segerberg.

[MacKinsey-Tarski 1948] MCKINSEY J. C. C. and TARSKI. Alfred. Some theorems about

the sentential calculi of Lewis and Heyting.
The Journal of Symbolic Logic, 13:115, 1948.

[Tarski 1949] TARSKI. Alfred. On the calculus of relations. Journal of Symbolic Logic, 6:7389, 1941.